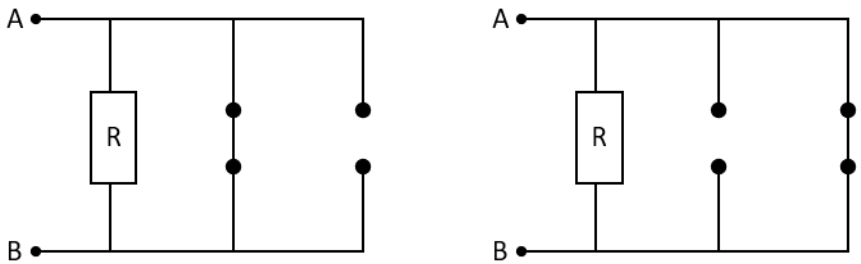
Électrocinétique | Chapitre 4 | Correction TD (E4)

Exercice n°1 • Impédance équivalente *cours*

1) En BF, la bobine est équivalente à un fil, qui court-circuite les deux autre dipôle. Donc $\underline{Z_{eq}}\,(\text{BF}) = 0$. En HF, le condensateur est équivalente à un fil, qui court-circuite les deux autre dipôle. Donc $\underline{Z_{eq}}\,(\text{HF}) = 0$.

BF **HF**



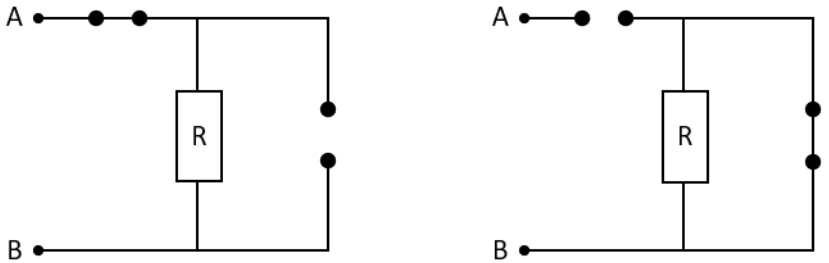
On a:

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$

On a bien $\underline{Z_{eq}} \to 0$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

2)

BF **HF**



$\underline{Z_{eq}} = R$ $\underline{Z_{eq}} = \infty$

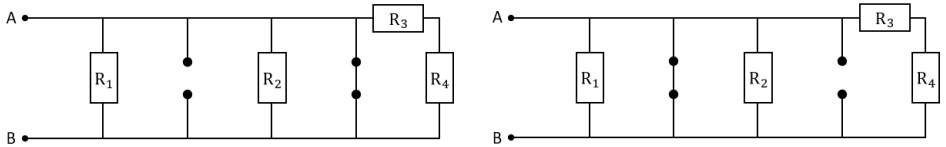
On a:

$$\underline{Z_{eq}} = j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1}$$

On a bien $\underline{Z_{eq}} \to R$ lorsque $\omega \to 0$ et $\underline{Z_{eq}} \to \infty$ lorsque $\omega \to \infty$.

3)

BF **HF**



$\underline{Z_{eq}} = 0$ $\underline{Z_{eq}} = 0$

On a:

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$

On a bien $\underline{Z_{eq}} \to 0$ lorsque $\omega \to 0$ et lorsque $\omega \to \infty$.

Exercice n°2 • Obtenir une ED grâce à la notation complexe *cours*

1) Impédance équivalente de la résistance et de la bobine en dérivation :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1} = \frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R}$$

Pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{r + \underline{Z_{eq}}} = \frac{j\omega L}{r + j\omega L\left(1 + \frac{r}{R}\right)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(r + j\omega L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right) \cdot \underline{s}(t) = j\omega L \cdot \underline{e}(t)}$$

2) On repasse en réel :

$$\left(r + L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{d}{dt}\right) \cdot s(t) = L\frac{dE}{dt} = 0$$

Ainsi,

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{L}{r}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Exercice n°3 • Circuit (RL) ‖ (RC) *cours*

1) On pose :

$$\underline{Z_1} = R + j\omega L \qquad \underline{Z_2} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

L'impédance équivalente vaut :

$$\boxed{\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}\right)^{-1}}$$

2) On utilise des ponts diviseur de courant puis on divise par $e^{j\omega}$.

$$\underline{i_1(t)} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{i(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{I_{m1}} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{I_m}}$$

$$\underline{i_2(t)} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{i(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{I_{m2}} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{I_m}}$$

3) On a :

$$\begin{aligned} I_{m1} = I_{m2} \quad &\Rightarrow \quad \left|\underline{Z_1}\right| = \left|\underline{Z_2}\right| \\ &\Rightarrow \quad R^2 + (\omega L)^2 = R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 LC = 1} \end{aligned}$$

4) Les deux signaux sont en quadrature de phase lorsque le rapport $\underline{I_{m2}}/\underline{I_{m1}}$ est un imaginaire pur. En effet :

$$\underline{I_{m1}} = I_{m1}\,e^{j\phi_1} \quad \underline{I_{m2}} = I_{m2}\,e^{j\left(\phi_1 \pm \frac{\pi}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{I_{m2}}}{\underline{I_{m1}}} = \frac{I_{m2}}{I_{m1}}\,e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j\,\frac{I_{m2}}{I_{m1}}$$

Or, on a :

$$\frac{\underline{I_{m2}}}{\underline{I_{m1}}} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = \frac{R + j\omega L}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(R + j\omega L)\left(R - \frac{1}{j\omega C}\right)}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Ce rapport est un imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle. Ainsi,

$$R^2 - \frac{L}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R^2 C}{L} = 1}$$

Exercice n°4 • Existence d'une résonance ? ★☆☆

On combine R et C en dérivation :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1}$$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + 2R}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + 2R\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)}\,\underline{e} = \frac{1}{3 + 2j\omega RC}\,\underline{e}$$

En module :

$$U_m = \frac{E_m}{\sqrt{g(\omega)}} \quad \text{avec :} \quad g(\omega) = 9 + (2\omega RC)^2$$

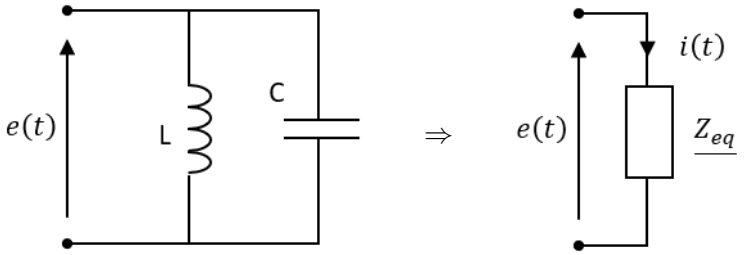
Il existe une résonance en tension si U_m possède un maximum, donc si $g(\omega)$ possède un minimum. Or,

$$g'(\omega) = 8R^2C^2\omega$$

La dérivée g' ne s'annule qu'en $\omega = 0$ mais cela ne compte pas comme une résonance. En effet, $U_m(\omega)$ est une fonction strictement décroissante et ne possède donc pas de maximum local.

Exercice n°5 • Circuit bouchon ★☆☆

1) On passe par l'impédance équivalente du circuit :



On a:

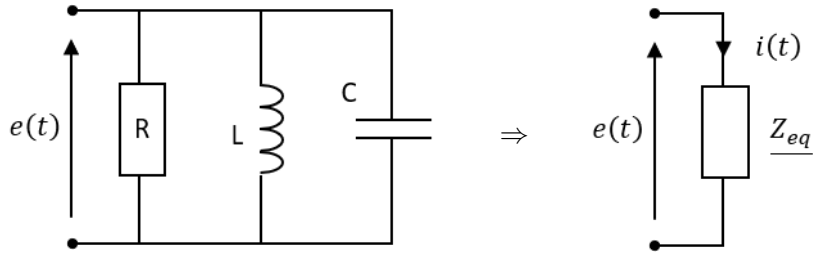
$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$

On en déduit:

$$I_m = \frac{U_m}{\left|\underline{Z_{eq}}\right|} = \boxed{U_m \left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right|}$$

$I_m = 0$ (valeur minimale) lorsque $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

2) Avec la même méthode :



On a:

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$

On en déduit:

$$I_m = \frac{U_m}{\left|\underline{Z_{eq}}\right|} = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

I_m est encore minimale lorsque $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

Exercice n°6 • Détermination d'une ED ★★☆

1) On combine R et C en dérivation :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1}$$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + 2R}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + 2R\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)}\,\underline{e} = \frac{1}{3 + 2j\omega RC}\,\underline{e}$$

On en déduit :

$$\left(3 + 2j\omega RC\right)\underline{u} = \underline{e} \quad \Rightarrow \quad 2RC\,\frac{du}{dt} + 3u = e(t)$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e(t)}{2RC} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{2RC}{3}}$$

2) L'impédance équivalente est :

$$\underline{Z_{eq}} = R + j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

On a donc :

$$\underline{e} = \underline{Z_{eq}} \times \underline{i} = \left(R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}\right)\underline{i}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(R + j\omega L\right)\left(1 + j\omega RC\right)\right]\underline{i} = \left(1 + j\omega RC\right)\underline{e}$$

$$\Rightarrow \quad \left(R + j\omega\left(L + R^2C\right) + (j\omega)^2 RLC\right)\underline{i} = \left(1 + j\omega RC\right)\underline{e}$$

$$\Rightarrow \quad Ri + \left(L + R^2C\right)\frac{di}{dt} + RLC\,\frac{d^2i}{dt^2} = e(t) + RC\,\frac{de}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{e}{LC} + \frac{1}{L}\,\frac{de}{dt}$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2\, i(t) = \frac{e}{LC} + \frac{1}{L}\,\frac{de}{dt} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \omega_0\left(\dfrac{1}{RC} + \dfrac{R}{L}\right)^{-1} \end{cases}}$$

3) On combine les dipôles αRet L en série ; R et αL en dérivation :

$$\underline{Z_1} = \alpha R + j\omega L \quad \text{et} \quad \underline{Z_2} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\alpha\omega L}\right)^{-1}$$

On applique un pont diviseur de tension.

$$\begin{aligned}\underline{u} &= \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\,\underline{e} = \frac{1}{1+\Big(\alpha R+j\omega L\Big)\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{j\alpha\omega L}\right)}\,\underline{e}\\ &= \frac{j\omega L/R}{j\omega L/R+\Big(\alpha+j\omega L/R\Big)\Big(j\omega L/R+1/\alpha\Big)}\,\underline{e}\\ &= \frac{j\omega L/R}{1+\left(1+\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{j\omega L}{R}+\left(\dfrac{j\omega L}{R}\right)^2}\,\underline{e}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left[1+\left(1+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{j\omega L}{R}+\left(\frac{j\omega L}{R}\right)^2\right]\underline{u}=\frac{j\omega L}{R}\,\underline{e}$$

En notation réelle :

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{R}{L}\left(1+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{du}{dt}+\left(\frac{R}{L}\right)^2 i=\frac{R}{L}\,\frac{de}{dt}$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2\,u(t)=\omega_0\,\frac{de}{dt}\quad\text{avec :}\quad\begin{cases}\omega_0=\dfrac{R}{L}\\ Q=\left(1+\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{-1}\end{cases}}$$

Exercice n°7 • Impédance itérative ★★☆

1) L'énoncé demande l'une des expressions suivantes (j'effectue ici le calcul complet jusqu'à obtenir la forme demandée) :

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \left(j\omega C+\left(j\omega L+\left(j\omega C+\frac{1}{\underline{Z}}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\\ &= \left(j\omega C+\left(j\omega L+\frac{\underline{Z}}{1+j\omega C\underline{Z}}\right)^{-1}\right)^{-1}\\ &= \left(j\omega C+\frac{1+j\omega C\underline{Z}}{j\omega L+\underline{Z}\,(1-\omega^2CL)}\right)^{-1}\\ &= \frac{j\omega L+\underline{Z}\,(1-\omega^2CL)}{(1-\omega^2CL)+j\omega C\underline{Z}\,(1-\omega^2CL)+j\omega C\underline{Z}}\end{aligned}$$

On résout pour trouver $\underline{Z}$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad j\omega C\underline{Z}^2\,(1-\omega^2CL)+j\omega C\underline{Z}^2=j\omega L\\ &\Rightarrow\quad \underline{Z}^2=\frac{j\omega L}{j\omega C\,(2-\omega^2CL)}\\ &\Rightarrow\quad \boxed{\underline{Z}^2=\frac{L/C}{2-\omega^2CL}}\end{aligned}$$

2) Si $\omega<\sqrt{2/LC}$, alors $\underline{Z}^2>0$ donc, $\underline{Z}$ est une résistance R_{eq} tel que :

$$\boxed{R_{eq}=\sqrt{\frac{L/C}{2-\omega^2CL}}}$$

Si $\omega>\sqrt{2/LC}$, alors $\underline{Z}^2<0$ donc, $\underline{Z}$ est un imaginaire pur.

$$\underline{Z}=\pm j\sqrt{\frac{L/C}{\omega^2CL-2}}$$

Puisque le signe $\pm$ de l'impédance ne nous est pas imposé, il peut s'agir une bobine d'inductance L_{eq} ou d'un condensateur de capacité C_{eq} tel que :

$$j\omega L_{eq}=+j\sqrt{\frac{L/C}{\omega^2CL-2}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{L_{eq}=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{L/C}{\omega^2CL-2}}}$$

$$\frac{1}{j\omega C_{eq}}=-j\sqrt{\frac{L/C}{\omega^2CL-2}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{C_{eq}=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\omega^2CL-2}{L/C}}}$$

Exercice n°8 • Filtre de Wien ★★☆

1) En BF, condensateurs = circuits ouverts. Il n'y a donc aucun courant qui passe dans aucune des branches du circuit. Or, $u(t)$ est la tension aux bornes de la résistance de droite. Donc $\boxed{u(BF) = 0}$. En HF, condensateurs = fils. Or, $u(t)$ est la tension aux bornes du condensateur de droite. Donc $\boxed{u(HF) = 0}$.

2) Oui car H passe par un maximum.

3) On peut lire : $\boxed{\omega_{res} = 10 \text{ rad·s}^{-1}}$.

À la résonance :

$$H_{max} = 0,33 = \frac{U_{m,max}}{E_m}$$

Les pulsations de coupure sont les pulsations tel que : $H(\omega_c) = H_{max}/\sqrt{2} = 0,233$. On trouve : $\omega_{c1} = 35$ rad·s^{-1} et $\omega_{c2} = 3$ rad·s^{-1}.

Ainsi, par définition, la bande passante vaut :

$$\boxed{BP = \Delta\omega_c = 32 \text{ rad·s}^{-1}}$$

4) On note $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ les impédances équivalentes de R et C respectivement en dérivation et en série.

$$\underline{Z_1} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \qquad \underline{Z_2} = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}$$

On utilise un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + \underline{Z_2}/\underline{Z_1}}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + \dfrac{(1 + j\omega RC)\,(1 + j\omega RC)}{j\omega RC}}\,\underline{e}$$

On en déduit :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{3 + j\left(\omega RC - \dfrac{1}{\omega RC}\right)} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{j}{3}\left(\omega RC - \dfrac{1}{\omega RC}\right)}$$

On trouve la forme demandée avec :

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{3}} \qquad \boxed{Q = \frac{1}{3}} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

5) On en déduit :

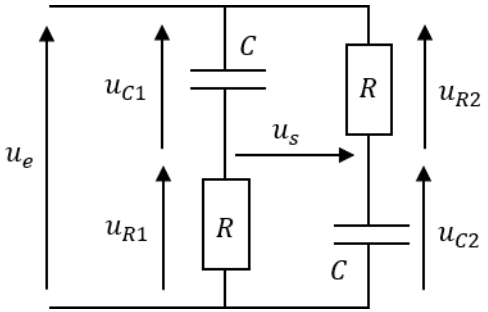
$$H_m(\omega) = \frac{H_0}{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Cette fonction est maximale lorsque son dénominateur est minimal, ie. lorsque la parenthèse est nulle, ie. pour $\boxed{\omega_{res} = \omega_0}$. On en déduit :

$$\boxed{RC = \frac{1}{\omega_{res}} = 0,1 \text{ s}}$$

Exercice n°9 • Déphaseur RC ★★½

1) Commençons par redessiner le circuit et légender toutes les tensions.



On est en RSF. On a : $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ et $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \phi)$. On cherche à déterminer U_s et ϕ. On passe en notation complexe. On pose : $\underline{u_e}(t) = U_e\, e^{j\omega t}$ et $\underline{u_s}(t) = \underline{U_s}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{U_s} = U_s\, e^{j\phi}$. On cherche ainsi à déterminer le complexe $\underline{U_s}$.

Pont diviseur de tension sur u_{R1} :

$$\underline{u_{R1}} = \frac{R}{R + 1/j\omega C}\,\underline{u_e} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\,\underline{u_e}$$

Pont diviseur de tension sur u_{C2} :

$$\underline{u_{C2}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\,\underline{u_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\,\underline{u_e}$$

Par additivité des tensions :

$$\underline{u_s} = -\underline{u_{R1}} + \underline{u_{C2}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}\,\underline{u_e}$$

On divise par $e^{j\omega t}$ on obtient :

$$\boxed{\underline{U_s} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}\, U_e}$$

Module :

$$U_s = \left|\underline{U_s}\right| = \frac{|1 - j\omega RC|}{|1 + j\omega RC|}\, U_e = U_e$$

Argument :

$$\phi = \arg\left(\underline{U_s}\right) = \arg(1 - j\omega RC) - \arg(1 + j\omega RC) + \underbrace{\arg(U_e)}_{=0} = 2\arg(1 - j\omega RC)$$

Ainsi,

$$\phi = -2\arctan(\omega RC)$$

On en déduit l'expression de $u_s(t)$:

$$\boxed{u_s(t) = U_e \cos(\omega t - 2\arctan(\omega RC))}$$

2) Le réglage du produit RC permet ainsi de déphaser arbitrairement un signal entre 0 et $-\pi$ sans modifier son amplitude. On a réalisé un circuit déphaseur.